Varainta 95

Subiectul I

a) Coordonatele punctului M , mijlocul segmentului $[AB]$, sunt $x_M = 0$, $y_M = 0$.
b) $OA = 10$, $OB = 10$, $OC = 10$.
c) $AC = 10\sqrt{2}$.
d) $S_{ABC} = 100$.
e) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{3}{2}$.
f) $z = 100i$.

Subiectul II
1.
a) $x \in \{-2, 2\}$.
b) $2 \cdot C_3^2 - 3^2 = -3$.
c) primul termen al dezvoltării este $27x^3$.
d) 3 numere.
e) $x \in \{-1, 2\}$.
2.
a) $f(1) = 7$.
b) $f'(x) = 20x^3$.
c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - 7}{x - 1} = 20$.
d) $x = 0$ este punct de minim local.
e) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 6$.

Subiectul III

a) $\det B = 1$.
b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = O_3$.
c) $AB = BA = I_3 - B$.
d) $(A + I_3) \cdot B = AB + B \overset{c)}{=} I_3 - B + B = I_3$.
e) Prin calcul obținem $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1 \cdot 1 = 1$.

f) Din punctul **b)** rezultă $A^k = O_3, \forall k \geq 3$.

Atunci $2A + 3A^2 + 4A^3 + ... + 11A^{10} = 2A + 3A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

g) Considerăm $P(n) : (I_3 + A)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Evident $P(1)$ este adevărată.

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

Dar $(I_3 + A)^{k+1} = (I_3 + A)^k (I_3 + A) = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & k+1 & k^2 + 2k + 1 \\ 0 & 1 & 2 + 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & (k+1)^2 \\ 0 & 1 & 2(k+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Deci $P(k+1)$ este adevărată. Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $P(n)$ este adevărată.,$\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Subiectul IV

a) $f(1) + f(2) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} = \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2}\right) = \ln 3$.

b) $f'(x) = \left(\ln \frac{x+1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{x(x+1)}, x > 0$.

c) $\int_1^{e-1} x \cdot f'(x)\, dx \overset{b)}{=} -\int_1^{e-1} \frac{1}{x+1}\, dx = -\ln(x+1)\Big|_1^{e-1} = \ln 2 - 1$.

d) Din punctul **b)** rezultă că $f'(x) < 0, \forall x \in (0, \infty)$, deci funcția f este descrescătoare pe $(0, \infty)$.

e) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \ln \frac{x+1}{x} = \ln 1 = 0$.

f) $f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=\ln\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}}-\ln\frac{x+1}{x}=\ln\left((x+1)\frac{x}{x+1}\right)=\ln x,\ \forall x>0.$

Atunci $\int_1^e\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)\right)dx=\int_1^e \ln x\,dx=(x\ln x)\Big|_1^e-\int_1^e dx=(x\ln x)\Big|_1^e-x\Big|_1^e=1.$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}=0.$